À propos de la fin de X Maths A 2017 (MP)

Clément de Seguins Pazzis

27 janvier 2018

1 Introduction

Dans toute cette note, nous faisons référence aux questions et notations de l'énoncé d'origine [2]. L'objectif est de démontrer que la condition $(\mathcal{F}_2)$ implique la condition $(\mathcal{F}_1)$.

D'abord, on constate facilement la condition $(\mathcal{F}_2)$ signifie que u ne possède aucune valeur propre réelle négative.

Il s'agit donc de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit ω et ω_1 deux formes symplectiques sur un espace vectoriel* réel *V de dimension finie. On suppose que l'endomorphisme u représentant ω_1 dans ω ne possède aucune valeur propre réelle négative. Il existe alors une structure complexe sur V domptée simultanément par ω et ω_1.*

2 Généralités sur les formes bilinéaires antisymétriques, théorème de Scharlau

Nous commençons par quelques généralités et rappels. Dans la suite, $\mathbb{K}$ est un corps arbitraire (commutatif) de caractéristique différente de 2. En caractéristique 2, les énoncés qui vont suivre demeurent à condition de considérer des formes bilinéaires alternées et non des formes bilinéaires antisymétriques, et de remplacer la notion de matrice antisymétrique par la notion de matrice alternée, c'est-à-dire de matrice M *de diagonale nulle* vérifiant ${}^tM = -M$.

Soit V un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et ω une forme bilinéaire antisymétrique sur V. La matrice de ω dans cette base est définie comme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) := \big(\omega(e_i, e_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n.}$$

Cette matrice est antisymétrique ; de plus elle est inversible si et seulement si ω est symplectique (i.e. $x \mapsto \omega(x, -)$ est injective). Toute matrice antisymétrique de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ représente dans $\mathcal{B}$ une unique forme bilinéaire antisymétrique sur V. Étant donné une autre base $\mathcal{C}$ de V, on dispose, en notant P la matrice de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$, de la formule de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\omega) = {}^tP\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) P.$$

Les matrices représentant ω forment donc une classe de congruence. Supposons ω symplectique et donnons-nous une autre forme bilinéaire antisymétrique ω_1 sur V. Il existe alors un unique endomorphisme u de V tel que

$$\forall (x,y) \in V^2,\ \omega_1(x,y) = \omega\big(x, u(y)\big).$$

Nous dirons que u représente ω_1 dans ω. Nous disposons alors, pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de V, de la relation matricielle

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(\omega)^{-1} M_{\mathcal{B}}(\omega_1).$$

Notation 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous notons*

$$J_A := \begin{pmatrix} 0 & -{}^tA \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ qui est évidemment antisymétrique.

Remarque 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Posons $Q := \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & {}^tP \end{pmatrix}$, qui est évidemment inversible, et notons que*

$${}^tQ J_{I_n} Q = J_{I_n} \quad \text{et} \quad {}^tQ J_A Q = J_{PAP^{-1}}.$$

On a vu dans la partie **I** de [2] que pour toute forme symplectique ω sur un espace vectoriel réel V de dimension n, l'entier n est pair et ω est représentée dans une certaine base par la matrice $J_{I_{n/2}}$: le résultat se généralise à un corps quelconque avec la même démonstration.

Le théorème suivant, réputé difficile, généralise en quelque sorte ce résultat à un couple de formes bilinéaires alternées dont l'une est symplectique. Nous démontrerons la première partie de l'énoncé de ce théorème dans la dernière partie du présent document.

Théorème 2 (Scharlau)**.** *Soit ω et ω_1 deux formes bilinéaires alternées sur un même espace vectoriel V de dimension finie $2n$. On suppose ω symplectique. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de V et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_{I_n} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega_1) = J_A.$$

En outre, étant donné $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de V telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\omega) = J_{I_n} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\omega_1) = J_B,$$

il est nécessaire et suffisant que les matrices A et B soient semblables. Enfin, ω_1 est symplectique si et seulement si A est inversible.

Par conséquent, le problème de la représentation matricielle simultanée de deux formes symplectiques est entièrement réduit à l'étude des classes de similitude des matrices carrées inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Dans ce théorème, la difficulté réside entièrement dans l'énoncé d'existence. En effet :

- Le dernier point est évident puisque l'on montre facilement que $\det J_A = (\det A)^2$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Compte tenu de la remarque 1 et de la formule de changement de base, on sait qu'étant donné deux matrices semblables A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'existence d'une base dans laquelle ω et ω_1 sont représentées respectivement par J_{I_n} et J_A équivaut à celle d'une base dans laquelle ω et ω_1 sont représentées respectivement par J_{I_n} et J_B.
- L'unicité de A à similitude près est plus délicate mais accessible facilement à qui connait la théorie des invariants de similitude : si l'on dispose en effet d'une base $\mathcal{B}$ de V et d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_{I_n}$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega_1) = J_A$, alors l'endomorphisme u représentant ω_1 dans ω vérifie

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{I_n}^{-1} J_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA \end{pmatrix} ;$$

ensuite, si $P_1, \dots, P_d$ désignent les invariants de similitude de A, par ordre décroissant de degrés, alors ce sont aussi ceux de ${}^tA$ et on en déduit que les invariants de simlitude de u sont $P_1, P_1, \dots, P_d, P_d$. Il est donc bien clair que $P_1, \dots, P_d$ sont déterminés par u, donc en définitive par (ω, ω_1) sans référence à la base $\mathcal{B}$. Ainsi, la classe de similitude de A est déterminée par (ω, ω_1).

3 Matrices réelles semi-simples

Définition 1. *Nous dirons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **semi-simple** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dans laquelle tout bloc diagonal est soit de taille 1, soit de taille 2 sans valeur propre réelle.*

Remarque 2. *On peut démontrer qu'une matrice carrée réelle est semi-simple si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-diagonalisable, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat dans la suite de l'exposé.*

Lemme 3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semi-simple. Il existe alors une matrice semblable à A et dont chaque bloc diagonal est soit de taille 1, soit de la forme $rR(\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Clairement, il suffit de montrer le résultat lorsque $n = 2$ et A est dénuée de valeur propre réelle. Dans ce cas, les valeurs propres de A s'écrivent $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ pour un réel $r > 0$ et un $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Partant d'un vecteur non nul X de $\mathbb{R}^2$, on sait que (X, AX) est libre car A n'a pas de valeur propre réelle : c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$. En posant $Y := -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} X + \frac{1}{r\sin\theta} AX$, on voit par opérations élémentaires que (X, Y) est encore une base de $\mathbb{R}^2$, et maintenant

$$\operatorname{Mat}_{(X,Y)}(u) = \begin{pmatrix} r\cos\theta & c \\ r\sin\theta & d \end{pmatrix}$$

pour des réels c et d. Or $\operatorname{tr} u = re^{i\theta} + re^{-i\theta} = 2r\cos\theta$ et $\det u = r^2$, donc $d = r\cos\theta$ puis $r^2\cos^2\theta - rc\sin\theta = r^2$, ce qui conduit à $c = -r\sin\theta$. Ainsi

$$\operatorname{Mat}_{(X,Y)}(u) = rR(\theta),$$

ce qui achève la démonstration. □

4 Un résultat de densité

À partir du théorème de Scharlau, nous allons obtenir le résultat de densité suivant :

Proposition 4. *Soit ω et ω_1 deux formes bilinéaires alternées sur un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie $2n$, avec ω symplectique. Il existe alors une suite $(\mathcal{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de bases de V ainsi qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :*

- *pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(\omega) = J_{I_n}$, tandis que la suite $\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(\omega_1)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge J_B ;*
- *la matrice B est semi-simple et a les mêmes valeurs propres complexes que l'endomorphisme*[1] *u représentant ω_1 dans ω.*

Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin de trois lemmes préliminaires successifs :

Lemme 5. *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie non nulle. Alors u admet une droite stable ou un plan stable.*

Lemme 6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe, dans la classe de similitude de A, une matrice triangulaire supérieure par blocs dont tout bloc diagonal est soit de taille 1, soit de taille 2 sans valeur propre réelle.*

Lemme 7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'adhérence de la classe de similitude de A contient alors une matrice semi-simple ayant même polynôme caractéristique que A.*

Remarque 3. *Par continuité de la fonction associant à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son polynôme caractéristique, on sait en fait que toutes les matrices appartenant à l'adhérence de la classe de similitude de A ont même polynôme caractéristique que A.*

Démonstration du lemme 5. Nous décomposons $\mu_u = \prod_{i=1}^N P_i^{a_i}$ où $P_1, \dots, P_N$ sont irréductibles unitaires deux à deux distincts, et $a_1, \dots, a_N$ entiers naturels non nuls. Par le lemme des noyaux, il vient $V = \bigoplus_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} P_i(u)^{a_i}$. On en déduit qu'il existe un polynôme irréductible unitaire $P \in \mathbb{R}[X]$ et un entier $a > 0$ tels que $\operatorname{Ker} P(u)^a \neq \{0\}$. Si $P(u)$ était injectif, on aurait par composition que $P(u)^a$ l'est aussi, ce qui est faux. Il existe donc $x \in V \setminus \{0\}$ tel que $P(u)[x] = 0$. Ainsi, en notant d le degré de P, on trouve $u^d(x) \in F := \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$. Il s'ensuit facilement que F est stable par u. Comme P est irréductible sur $\mathbb{R}$ on a $d \in \{1,2\}$, et donc $1 \leq \dim F \leq d = 2$. $\square$

Démonstration du lemme 6. Montrons ce résultat par récurrence (forte) sur n. Le résultat est évident pour $n \leq 1$. Fixons un entier $n \geq 2$, supposons le résultat vrai pour tout entier $k < n$ et toute matrice A de $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, et donnons-nous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $u : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Supposons que u possède une valeur propre (réelle) λ, et notons x un vecteur propre associé. En complétant x en une base de $\mathbb{R}^n$, on en déduit une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & [?] \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

1. Les valeurs propres complexes d'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sont définies comme les racines de son polynôme caractéristique.

pour une certaine matrice $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. L'hypothèse de récurrence fournit alors une matrice $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que QA_1Q^{-1} soit triangulaire supérieure par blocs, à blocs diagonaux tous de taille 1 ou de taille 2 sans valeur propre réelle. En posant $\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, on constate facilement que $\widetilde{Q}$ est inversible et que

$$\widetilde{Q}PAP^{-1}\widetilde{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & [?] \\ 0 & QA_1Q^{-1} \end{pmatrix},$$

et cette dernière matrice est bien de la forme triangulaire supérieure par blocs recherchée.

Supposons maintenant u dénuée de valeur propre réelle. On obtient donc, d'après le lemme 5, un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^n$ stable par u, dont on choisit une base (e_1, e_2). En complétant cette base en une base de $\mathbb{R}^n$, on en déduit une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_2 & [?] \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

pour des matrices $A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$. En notant par exemple que $\chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_2}$, on trouve que A_2 n'a pas de valeur propre réelle. L'hypothèse de récurrence fournit alors une matrice $Q \in \mathrm{GL}_{n-2}(\mathbb{R})$ telle que QA_1Q^{-1} soit triangulaire supérieure par blocs, à blocs diagonaux tous de taille 1 ou de taille 2 sans valeur propre réelle. En posant $\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, on constate facilement que $\widetilde{Q}$ est inversible et que

$$\widetilde{Q}PAP^{-1}\widetilde{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} A_2 & [?] \\ 0 & QA_1Q^{-1} \end{pmatrix},$$

et cette dernière matrice est bien de la forme triangulaire supérieure par blocs recherchée. Ceci achève la démonstration de l'hérédité, et le lemme est donc établi. □

Démonstration du lemme 7. Le lemme 6 fournit d'abord, dans la classe de similitude de A, une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure par blocs, de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & & [?] \\ & \ddots & \\ [0] & & D_p \end{pmatrix}$$

où chaque matrice $D_1, \dots, D_p$ est dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ pour un certain $d \in \{1, 2\}$, et sans valeur propre réelle si elle est de taille 2. La matrice diagonale par blocs

$$D := \begin{pmatrix} D_1 & & [0] \\ & \ddots & \\ [0] & & D_p \end{pmatrix}$$

est donc semi-simple. Par ailleurs, elle a évidemment même polynôme caractéristique que A', donc que A.

Pour conclure, il suffit de montrer que la matrice D appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A' (qui est la même que celle de A). Notons $d_1, \dots, d_p$ les tailles respectives des matrices carrées $D_1, \dots, D_p$ et, pour $\varepsilon > 0$, posons

$$P_\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon I_{d_1} & & [0] \\ & \ddots & \\ [0] & & \varepsilon^p I_{d_p} \end{pmatrix},$$

matrice évidemment inversible. Avec le même format d'écriture par blocs, on constate que pour tous i, j dans $\{1, \dots, d\}$, le bloc d'indices i et j dans $P_\varepsilon^{-1} A' P_\varepsilon$ est nul si $i > j$, et sinon vaut $\varepsilon^{j-i} B$ où B est le bloc d'indices i et j dans A'. Il s'ensuit que

$$P_\varepsilon^{-1} A' P_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} D,$$

ce qui achève la démonstration. □

Démonstration de la Proposition 4. D'abord, le théorème de Scharlau fournit une base $\mathcal{B}$ de V et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\omega) = J_{I_n}$ et $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\omega_1) = J_A$. Appliquons à A le lemme 7 : nous obtenons une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semi-simple, de même polynôme caractéristique que A, telles que la suite $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers B.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_k$ la base telle que

$$M_\mathcal{B}(\mathcal{B}_k) = \begin{pmatrix} P_k^{-1} & 0 \\ 0 & {}^t P_k \end{pmatrix},$$

de sorte que la formule de changement de base donne

$$\forall k \in \mathbb{N},\ M_{\mathcal{B}_k}(\omega) = J_{I_n} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}_k}(\omega_1) = J_{P_k A P_k^{-1}}.$$

Clairement,

$$J_{P_k A P_k^{-1}} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} J_B.$$

Enfin, on trouve que

$$M_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\chi_u = (\chi_A)^2 = (\chi_B)^2$, et B a donc les mêmes valeurs propres complexes que u. □

5 Conclusion

Nous commençons par ce qui s'apparente à une variante du résultat obtenu dans la question **24** de [2] :

Proposition 8. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semi-simple sans valeur propre réelle négative. Soit ω et ω_1 deux formes symplectiques sur un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ représentées, dans une même base, respectivement par J_{I_n} et J_B. Il existe alors une structure complexe domptée simultanément par ω et ω_1.*

Démonstration. Supposons B diagonale par blocs, à blocs diagonaux notés $B_1, \dots, B_p$, tous de taille 1 ou de la forme $rR(\theta)$ pour un réel $r > 0$ et un réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Notons $d_1, \dots, d_p$ les tailles respectives de $B_1, \dots, B_p$. Par permutation des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, on en déduit facilement une base $\mathcal{C}$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_{I_{d_1}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{I_{d_p}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\omega_1) = \begin{pmatrix} J_{B_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{B_p} \end{pmatrix}.$$

Il apparaît donc que V est la somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 2 ou 4, deux à deux orthogonaux pour ω et ω_1, et sur lesquels ω et ω_1 induisent des formes symplectiques. En outre, pour les sous-espaces de dimension 4 (respectivement 2) de cette décomposition, l'endomorphisme induit par u est représenté par une matrice de la forme $J_{I_2}^{-1} J_{B_k} = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & {}^t B_k \end{pmatrix}$ (respectivement $\lambda_k . I_2$ où λ_k est le coefficient de B_k), dénuée de valeur propre réelle (respectivement, à valeurs propres réelles strictement positives). Une simple adaptation de la démonstration de la question **24** de [2] montre alors qu'il existe une structure complexe domptée simultanément par ω et ω_1. □

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème 1. D'abord, la Proposition 4 fournit une matrice $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ semi-simple et de mêmes valeurs propres complexes que u, ainsi qu'une suite $(\mathcal{B}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de bases de V telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; M_{\mathcal{B}_k}(\omega) = J_{I_n} \qquad \text{et} \qquad M_{\mathcal{B}_k}(\omega_1) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} J_B.$$

La proposition 8 fournit ensuite une matrice $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = -I_{2n}$,

$$\forall X \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \quad {}^t X J_{I_n} J X > 0 \quad \text{et} \quad {}^t X J_B J X > 0.$$

Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un vecteur non nul X_k, que l'on peut évidemment supposer unitaire pour la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^{2n}$, vérifiant ${}^t X_k M_{\mathcal{B}_k}(\omega_1) J X_k \leq 0$. Par compacité de la sphère unité de $\mathbb{R}^{2n}$, on peut trouver une extraction φ et un vecteur unitaire $X \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $(X_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X. Par continuité du produit matriciel, il vient alors ${}^t X J_B J X \leq 0$, ce qui contredit le choix de J. On peut ainsi trouver un $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall X \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \; {}^t X M_{\mathcal{B}_k}(\omega_1) J X > 0.$$

Il est alors facile de voir que l'endomorphisme j de V représenté par J dans $\mathcal{B}_k$ est une structure complexe domptée simultanément par ω et ω_1. Le théorème 1 est donc établi, modulo la démonstration du théorème de Scharlau.

6 Démonstration du théorème de Scharlau

Pour commencer, quelques généralités. Soit b une forme symplectique sur un espace vectoriel E de dimension finie (le corps de base $\mathbb{K}$ est arbitraire). Un sous-espace vectoriel F de E est dit **totalement singulier** pour b lorsque $\forall (x,y) \in F^2,\ b(x,y)=0$. Il est dit **régulier** pour b lorsque la forme alternée induite par b sur F est symplectique. On note

$$F^\perp := \{x \in E :\ \forall y \in F,\ b(x,y)=0\},$$

qui est un sous-espace vectoriel de E. Un sous-espace vectoriel G de E est dit orthogonal à F lorsque $G \subset F^\perp$, ce qui équivaut à $F \subset G^\perp$ par antisymétrie de b.

Les résultats suivants sont élémentaires et nous les utiliserons sans démonstration :

- On a $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
- La somme de deux sous-espaces totalement singuliers et orthogonaux est totalement singulière.
- Étant donné F un sous-espace vectoriel régulier de E, on a $E = F \oplus F^\perp$, et $F^\perp$ est régulier.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **b-alterné** lorsque $(x,y) \mapsto b(x,u(y))$ est alternée, ce qui implique l'identité

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b(u(x),y) = b(x,u(y)) \tag{1}$$

(et est même équivalent à celle-ci lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un tel endomorphisme. On note que toutes les puissances de u sont encore b-alternées. En effet, pour tout $x \in E$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on trouve

$$b(x,u^{2k}(x)) = b(u^k(x),u^k(x)) = 0 \quad \text{et} \quad b(x,u^{2k+1}(x)) = b(u^k(x),u(u^k(x))) = 0.$$

On démontre facilement que pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par u, le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est stable par u.

Nous allons démontrer le théorème suivant, qui, comme on va le voir très vite, implique facilement la première partie du théorème de Scharlau :

Proposition 9. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme b-alterné. Il existe alors deux sous-espaces totalement singuliers F et G de E, de même dimension, tous stables par u et tels que $E = F \oplus G$.*

Nous commençons par un lemme préliminaire.

Lemme 10 (Lemme de la base symplectique incomplète)**.** *Soit F un sous-espace vectoriel totalement singulier, muni d'une base $(e_1,\dots,e_p)$, et soit G un supplémentaire de $F^\perp$ dans E. Alors :*

(a) Le sous-espace vectoriel $F \oplus G$ est régulier.

(b) Il existe une base $(f_1,\dots,f_p)$ de G telle que $b(e_i,f_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

Démonstration. (a) Soit $x \in F \oplus G$ orthogonal à tout vecteur de $F \oplus G$. En particulier $x \in F^\perp$. On écrit $x = y+z$ où $y \in F$ et $z \in G$. Ainsi, $z = x-y \in F^\perp$, puis $z=0$, et ainsi $x \in F$. Par suite, x est orthogonal à tout vecteur de $F^\perp$ et à tout vecteur de G, donc à tout vecteur de E, et finalement $x=0$ puisque b est non dégénérée.

(b) Notons que $\dim G = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$. L'application linéaire

$$x \in F \mapsto b(x,-)_{|G} \in G^\star$$

est injective : en effet, tout élément de son noyau est orthogonal à tout élément de G, et aussi à tout élément de F car F est totalement singulier, donc à tout élément de $F \oplus G$, lequel est régulier. Comme $\dim G^\star = \dim G = \dim F$, cette application linéaire est un isomorphisme. Pour conclure, il suffit de prendre une base antéduale de la base $(b(e_i,-)_{|G})_{1\leq i\leq p}$.

□

Dans le théorème de Scharlau, la seconde partie (portant sur la latitude quant au choix de A) a déjà été établie à partir de la théorie des invariants de similitude. Nous montrons maintenant comment la première partie de l'énoncé se déduit des considérations précédentes.

Démonstration de la première partie du théorème de Scharlau à partir de la proposition 9. Soit ω et ω_1 deux formes bilinéaires alternées sur un même espace vectoriel V de dimension finie $2n$. On suppose ω symplectique. On écrit $\omega_1 : (x,y) \mapsto \omega(x,u(y))$ pour un unique $u \in \mathcal{L}(V)$ (on définit u comme la composée de $y \mapsto \omega_1(-,y)$ à gauche par la bijection réciproque de $y \mapsto \omega(-,y)$). Ainsi, u est ω-alterné. La proposition 9 donne donc deux sous-espaces totalement singuliers F et G de E, de même dimension, stables par u et tels que $V = F \oplus G$. Ainsi $\dim F = \dim G = n$. De plus $F \subset F^\perp$ et $\dim F = \dim F^\perp$, donc $F = F^\perp$. Le lemme de la base symplectique incomplète fournit des bases respectives $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ de F et G telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \omega(f_j,e_i) = \delta_{i,j}$. Constatons que F et G restent totalement singuliers pour ω_1. En effet, pour tous x,y dans F, le vecteur $u(y)$ est dans F donc $\omega_1(x,y) = \omega(x,u(y)) = 0$. De même pour G. La base $\mathbf{B} := (e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ convient alors évidemment. □

Pour finir, nous allons démontrer la proposition 9. Le point de départ est le lemme suivant :

Lemme 11. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme b-alterné. Soit $x \in E$. Le sous-espace $V_x := \mathrm{Vect}(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est alors totalement singulier.*

Démonstration. En effet, pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$b(u^k(x), u^l(x)) = b(x, u^{k+l}(x)) = 0,$$

où la première égalité découle de (1) appliquée à u^k, et la deuxième du fait que u^{k+l} est b-alterné. On conclut par bilinéarité de b. □

En vue de la suite, on rappelle le fait classique voulant que, pour $d := \dim V_x$,

$$V_x = \mathrm{Vect}(u^k(x))_{0\leq k\leq d-1}.$$

Démonstration de la proposition 9. Nous procédons par récurrence sur la dimension de l'espace envisagé. Le résultat est trivial si E est de dimension nulle. Supposons le contraire et prenons un vecteur (nécessairement non nul) x de E pour lequel V_x soit de dimension maximale parmi les sous-espaces de la forme V_y.

Évidemment, V_x est stable par u. Notons d sa dimension. Partons d'un supplémentaire arbitraire G de $(V_x)^\perp$ dans E. Le lemme de la base symplectique incomplète fournit une base $(f_0, \dots, f_{d-1})$ de G telle que $b(u^k(x), f_l) = \delta_{k,l}$ pour tout $(k,l) \in [\![0, d-1]\!]^2$. Posons $y := f_{d-1}$ et montrons que V_y est de dimension d et que $(V_x)^\perp \oplus V_y = E$.

- Nous savons déjà que $\dim V_y \leq d$ vu le choix de x.
- Montrons que $(u^k(y))_{0 \leq k \leq d-1}$ est libre modulo $(V_x)^\perp$. Pour cela, on se donne $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ telle que $\sum\limits_{k=0}^{d-1} \lambda_k\, u^k(y) \in (V_x)^\perp$. Montrons par récurrence descendante forte que tous les λ_k sont nuls. Soit $p \in [\![0, d-1]\!]$. Supposons $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{d-1} = 0$ (hypothèse trivialement vraie si $p = d-1$). Il vient alors que $\sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k\, u^k(y) \in (V_x)^\perp$, puis en utilisant l'orthogonalité de ce vecteur avec $u^{d-1-p}(x)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{p} \lambda_k\, b(u^{d-1-p}(x), u^k(y)) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \lambda_k\, b(u^{d-1-p+k}(x), y) \quad \text{(car } u^k \text{ est } b\text{-alterné)} \\ &= \lambda_p. \end{aligned}$$

  On conclut que $(u^k(y))_{0 \leq k \leq d-1}$ est libre et que le sous-espace qu'elle engendre est indépendant de $(V_x)^\perp$. Comme $\dim V_y \leq d$, on en déduit que $V_y = \operatorname{Vect}(u^k(y))_{0 \leq k \leq d-1}$ et que $(V_x)^\perp \cap V_y = \{0\}$, et enfin grâce aux dimensions $(V_x)^\perp \oplus V_y = E$.

Le point (a) du lemme 10 montre alors que $V_x \oplus V_y$ est régulier. Il s'agit d'un sous-espace stable par u : son orthogonal W est donc stable par u. On écrit alors $E = (V_x \oplus V_y) \oplus W$, et W est régulier. On note b' la forme symplectique induite par u sur W (autrement dit, sa restriction à $W \times W$). L'endomorphisme induit par u sur W est évidemment b'-alterné, et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence car $\dim W < \dim E$: il existe une décomposition $W = W_1 \oplus W_2$ dans laquelle W_1 et W_2 sont totalement singuliers, de même dimension et tous deux stables par u. Finalement, $E = (V_x \oplus W_1) \oplus (V_y \oplus W_2)$, les sous-espaces $V_x \oplus W_1$ et $V_y \oplus W_2$ sont stables par u ; enfin comme V_x et W_1 sont orthogonaux et totalement singuliers, $V_x \oplus W_1$ est totalement singulier. De même $V_y \oplus W_2$ est totalement singulier. Enfin

$$\dim(V_x \oplus W_1) = \dim V_x + \dim W_1 = \dim V_y + \dim W_2 = \dim(V_y \oplus W_2),$$

ce qui achève la démonstration. □

Références

[1] R. Scharlau, Paare alternierender Formen, Math. Z. **147** (1976) 13–20.

[2] Première Composition de Mathématiques, filière MP, Concours d'admission à l'École Polytechnique, session 2017.