Séminaire d'algèbre et géométrie de l'UVSQ

3 mai 2011

Géométrie affine des espaces de matrices

Clément de Seguins Pazzis
Lycée Sainte-Geneviève, Versailles

Introduction.

I. Quelques résultats historiques.

II. Classification des grands espaces vectoriels de matrices de rang majoré.

III. Espaces affines de matrices de rang minoré.

Introduction

$\mathbb{K}$ corps (commutatif).
On considère une propriété $\mathcal{P}(M)$ définie pour M dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (éventuellement $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Exemples :

(i) "$\operatorname{rg} M \leq r$"

(ii) "M inversible ou nulle"

(iii) "M nilpotente"

(iv) "M diagonalisable".

Premier type de problème : Sous-espaces vectoriels de matrices de type particulier

Étudier les sous-espaces vectoriels (éventuellement les sous-espaces affines) de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments M vérifient $\mathcal{P}(M)$.

$\rightarrow$ dimension maximale d'un tel sev ?

$\rightarrow$ classification de ces sev, **ou au moins de ceux de “grande" dimension** ?

Second type de problème : Questions de préservation linéaire

Déterminer les automorphismes f (éventuellement les endomorphismes) de *l'espace vectoriel* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui conservent la propriété $\mathcal{P}$:

– ou bien **au sens faible** i.e.

$$\forall M,\ \mathcal{P}(M) \Rightarrow \mathcal{P}(f(M))$$

– ou bien **au sens fort** i.e.

$$\forall M,\ \mathcal{P}(M) \Leftrightarrow \mathcal{P}(f(M)).$$

I. Grands résultats historiques

A. SEV de matrices de rang ≤ 1

Théorème 1 (Schur)**.** *Soit V sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\forall M \in V,\ \operatorname{rg} M \leq 1$.*
Alors il existe $X_0 \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et F sev de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que

$$V = X_0\, {}^t F \qquad \textit{ou} \qquad V = F\, {}^t X_0.$$

En particulier $\dim V \leq n$, avec égalité ssi V ou ${}^tV$ équivalent à

$$\left\{ \begin{bmatrix} C & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mid C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \right\}.$$

B. SEV de matrices singulières

Théorème 2 (Dieudonné)**.** *Soit V sous-espace affine de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\forall M \in V$, $\operatorname{rg} M < n$.*

(a) $\dim V \leq n^2 - n$.

(b) Si $\dim V = n^2 - n$, *alors V ou ${}^tV$ est équivalent à*

$$\left\{ \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \mid C_1, \dots, C_{n-1} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \right\}$$

(matrices de dernière colonne nulle) . . . sauf lorsque $n = 2$, $\operatorname{card}(\mathbb{K}) = 2$ *et V équivalent à*
$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x+1 \end{bmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

J. Dieudonné, Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables, *Arch. Math.*, **1** (1949) 282-287.

Remarque 1. Les matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ constituent un sev maximal de matrices singulières de dimension 5 !

C. Automorphismes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ conservant l'inversibilité

Théorème 3 (Dieudonné). *Soit* f *automorphisme de l'espace vectoriel* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *t.q.* $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Alors $\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ *t.q.*

$$\forall M,\ f(M) = PMQ \quad ou \quad \forall M,\ f(M) = P\,{}^tMQ.$$

Remarque 2. L'hypothèse $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est suffisante. On sait même classifier les *endomorphismes* f de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Voir C. de Seguins Pazzis, The singular linear preservers of non-singular matrices, *Linear Algebra Appl.*, **433** (2010) 483-490.

Idées de preuve :

$\rightarrow$ on fait agir f sur l'ensemble des sev de matrices singulières de dimension $n^2 - n$;

$\rightarrow$ ces sev sont les ensembles

$$\mathcal{M}_D = \{M : \forall X \in D,\ MX = 0\}$$

et

$$\mathcal{M}^D = \{M : \forall X \in D,\ {}^tXM = 0\},$$

D droite vectorielle quelconque de $E = \mathbb{K}^n$;

$\rightarrow$ OPS $\exists D_1, \exists D_2 :\ f(\mathcal{M}_{D_1}) = \mathcal{M}_{D_2}$;

$\rightarrow$ on trouve φ et ψ de $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même t.q.

$$\forall D \in \mathbb{P}(E),\ f(\mathcal{M}_D) = \mathcal{M}_{\varphi(D)} \text{ et } f(\mathcal{M}^D) = \mathcal{M}^{\psi(D)},$$

$\rightarrow$ φ et ψ sont des homographies (utilise en particulier le thm fondamental de la géométrie projective) ;

$\rightarrow$ OPS $\varphi = \psi = \mathrm{id}$;

$\rightarrow$ on montre alors que $f = \lambda\, \mathrm{id}$ en trouvant de nombreux vecteurs propres de f.

D. SEV de matrices nilpotentes

Théorème 4 (Gerstenhaber)**.** *Soit V sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont nilpotents. Alors :*

(a) $\dim V \leq \binom{n}{2}$.

(b) *Si* $\dim V = \binom{n}{2}$, *alors V est conjugué à $T_n^{++}(\mathbb{K})$, espace des matrices triangulaires supérieures strictes.*

M. Gerstenhaber, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices (I), *Amer. J. Math.* **80** (1958) 614-622.

V. N. Serezhkin, On linear transformations preserving nilpotency, *Izv. Akad. Nauk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk.* **6** (1985) 46-50.

Attention, les sev nilpotents maximaux ne sont pas nécessairement de dimension $\binom{n}{2}$.

Exemple : $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & a \\ a & b & 0 \end{bmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

II. Grands espaces de matrices de rang $\leq r$

A. Le théorème de Flanders

Théorème 5 (Flanders). *Soit* $r \in [\![1, n-1]\!]$ *et* V *sev de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\forall M \in V$, $\operatorname{rg} M \leq r$. *Alors :*

(a) $\dim V \leq rn$ *;*

(b) Si $\dim V = rn$*, alors* V *ou* ${}^tV$ *est équivalent à*

$$\left\{\begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mid C_1, \dots, C_r \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right\}.$$

Cas où $\mathrm{card}(\mathbb{K}) > r$:

H. Flanders, On spaces of linear transformations with bounded rank, *J. Lond. Math. Soc.*, **37** (1962) 10-16.

Cas général :

R. Meshulam, On the maximal rank in a subspace of matrices, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985) 225-229.

B. Le théorème d'Atkinson et Lloyd

Théorème 6 (Atkinson-Lloyd)**.** *Soit* $r \in [\![1, n-1]\!]$ *et* V *sev de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *t.q.* $\forall M \in V,\ \operatorname{rg} M \leq r$.
On suppose que $\operatorname{card}(\mathbb{K}) > r$. *Alors :*

(a) *Si* $\dim V > nr - r + 1$, *alors* V *ou* ${}^tV$ *est équivalent à un sev de*

$$\left\{ \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mid C_1, \ldots, C_r \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \right\}$$

(b) *Si* $\dim V = nr - r + 1$, *alors la seule autre possibilité est que* V *ou* ${}^tV$ *soit équivalent à l'espace des matrices du type*

$$\begin{bmatrix} ? & \cdots & ? & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & \cdots & ? & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(limitation sur les $n - r + 1$ *dernières colonnes).*

M.D. Atkinson, S. Lloyd, Large spaces of matrices of bounded rank, *Quart. J. Math. Oxford (2),* **31** (1980) 253-262.

Contre-exemple pour $n=3$, $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_2$ et $\dim V = 5$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a+d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{K} \right\}$$

(espace des matrices triangulaires supérieures de trace nulle).

C. Le théorème d'Atkinson et Lloyd généralisé

Théorème 7 (de Seguins Pazzis (2010))**.** *Le théorème d'Atkinson et Lloyd reste vrai sans hypothèse sur* $\mathbb{K}$*, sauf si* $n=3$*,* $r=2$*,* $\operatorname{card}\mathbb{K}=2$*, et* $\dim V = 5$*, où le contre-exemple précédent est, à équivalence près, la seule exception à la règle.*

C. de Seguins Pazzis, The classification of large spaces of matrices with bounded rank, prépublication arXiv, http ://arxiv.org/abs/1004.0298

Une application (non triviale) :

Théorème 8 (de Seguins Pazzis (2010))**.** *Soit* V *sev de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *de codimension* $\leq n-2$*, et* $f : V \hookrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *injection linéaire conservant l'inversibilité au sens fort.*
Alors, sauf éventuellement si $n = 3$, $\mathrm{card}(\mathbb{K}) = 2$ *et* $\operatorname{codim} V = 1$*, il existe* $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ *t.q.*

$$\forall M,\ f(M) = PMQ \quad \textit{ou} \quad \forall M,\ f(M) = P\,{}^tMQ$$

La conservation de l'inversibilité au sens faible suffit si $\mathbb{K}$ *est infini.*

C. de Seguins Pazzis, The linear preservers of non-singularity in a large space of matrices, prépublication arXiv, http ://arxiv.org/abs/1004.2467

D. Principes de démonstration

Soit V sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\forall M \in V,\ \mathrm{rg}(M) \leq r$.

(a) Méthode de Flanders

On suppose $\mathrm{card}(\mathbb{K}) > r$.

OPS V contient une matrice de rang r (réc. sur r).
OPS V contient

$$J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On découpe toute matrice de V sous le m̂ format :

$$M = \begin{bmatrix} A(M) & C(M) \\ B(M) & D(M) \end{bmatrix}.$$

On fixe $(i,j) \in [\![1, n-p]\!]^2$ et on note L_i la i-ème ligne de $A(M)$ et C_j la j-ème col. de $C(M)$.
Alors

$$\forall t \in \mathbb{K},\ \begin{vmatrix} tI_r + A(M) & C_j \\ L_i & d_{i,j}(M) \end{vmatrix} = 0$$

i.e., $\forall t \in \mathbb{K}$,

$d_{i,j}(M)t^r + \big[d_{i,j}(M)\,\mathrm{tr}\,A(M) - L_i C_j\big]t^{r-1} + \cdots = 0.$

$\to$ l'hypothèse de cardinalité assure :

$$D(M) = 0 \quad \text{et} \quad B(M)C(M) = 0.$$

$\to$ $F := \big\{(B(M), C(M)) \mid M \in V\big\}$ est totalement isotrope pour la FQ régulière $q(B, C) := \mathrm{tr}(BC)$, donc $\dim F \leq r(n-r)$.
$\to$ on en déduit l'inégalité :

$$\dim V \leq r^2 + r(n-r) = nr.$$

$\boxed{\text{On suppose maintenant } \dim V > nr - r + 1.}$
On introduit
$V' := \{M \in V : \; B(M) = 0 \quad \text{et} \quad C(M) = 0\}$.
Le thm du rang donne

$$\dim V' > r^2 - r + 1.$$

Soit $P \in A(V')$. On reprend la méthode précédente avec $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ au lieu de J_r.

On obtient, $\forall M \in V$,

$$B(M)\,{}^t\operatorname{com}(P)\,C(M) = 0.$$

Lemme 9. *Soit* V_1 *sev de* $\mathrm{M}_r(\mathbb{K})$ *t.q.*
$\operatorname{codim} V_1 \leq r-2$.
Alors, pour tt $x \in \mathbb{K}^r \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{K}^r = \operatorname{Vect}\{{}^t\operatorname{com}(P)x \mid P \in V_1\}.$$

Démonstration. Sinon, OPS
$\forall M \in V_1,\ \operatorname{com}(M)_{1,1} = 0$ i.e. pour tout $M \in V$,
la ss-matrice obtenue en retirant 1-ère ligne et
1-ère col. est singulière
$\to$ contradiction avec le thm de Dieudonné. □

Remarque 3. Le lemme peut être raffiné :
$\operatorname{Vect}\{M^{-1}x \mid M \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K}) \cap V_1\} = \mathbb{K}^r$ pour tout
$x \in \mathbb{K}^r \setminus \{0\}$.

$\to$ on en déduit successivement
$\forall M \in V,\ B(M) = 0 \quad \text{ou} \quad C(M) = 0$

$$\forall M \in V,\ B(M) = 0 \quad \text{ou} \quad \forall M \in V,\ C(M) = 0.$$

(b) Méthode raffinée

$\to \mathbb{K}$ corps quelconque.
L'astuce est de limiter les calculs à des polynômes de degré au plus 2 en utilisant + finement le thm du rang
$\to$ on introduit deux sev de V :
W sev des élts de V de la forme $\begin{bmatrix} 0_r & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$;
H sev des élts de W de la forme $\begin{bmatrix} 0_r & ? \\ 0_{n-r,r} & ? \end{bmatrix}$;
$\to$ thm du rang :

$$\dim V = \dim A(V) + \dim B(W) + \dim H.$$

On part de $M_0 \in V$ et $M \in W$.
De

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} A(M_0) & C(M_0) + C(M) \\ B(M_0) + B(M) & D(M_0) + D(M) \end{bmatrix} \leq r,$$

on tire

$$\begin{aligned}&\det(A(M_0))\left[D(M)+D(M_0)\right]\\ &=\left[B(M_0){+}B(M)\right]{}^t\operatorname{com}(A(M_0)){\times}\left[C(M_0){+}C(M)\right].\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\det(A(M_0))\,D(M) =&B(M)\,{}^t\operatorname{com}(A(M_0))\,C(M_0)\\ &+B(M_0)\,{}^t\operatorname{com}(A(M_0))\,C(M)\\ &+B(M)\,{}^t\operatorname{com}(A(M_0))\,C(M).\end{aligned}$$

En particulier (prendre M_0 t.q. $A(M_0)=I_r$)

$$\forall M\in H,\ C(M)=0\Rightarrow D(M)=0$$

d'où

$$\dim V=\dim A(V)+\dim B(W)+\dim C(H).$$

Par polarisation :

$$\forall(M,N)\in W{\times}H,\quad B(M)\,{}^t\operatorname{com}(A(M_0))\;C(N)=0.$$

En particulier vrai pour $M_0=J_r$ d'où la majoration du thm de Flanders.

$\to$ puis avec le lemme 9 :

$$C(H) = \{0\} \quad \text{ou} \quad B(W) = \{0\}.$$

Quitte à considérer ${}^tV$, OPS $C(H) = \{0\}$ d'où $H = \{0\}$.

Bilan provisoire : V est de la forme

$$\left\{ \begin{bmatrix} N & \varphi(N) \end{bmatrix} \mid N \in W_1 \right\}$$

où W_1 sev de $\mathrm{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ de codim $< r-1$, et φ lin. On montre ensuite :

$$\exists C \in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}) : \forall N \in W_1,\ \varphi(N) = NC$$

et alors tt $M \in V$ est nul sur l'image de $\begin{bmatrix} C \\ -I_{n-r} \end{bmatrix}$ (de dim. $n-r$).

2 étapes pour ce dernier point :

Lemme 10. *Soit* W_1 *sev de* $\mathrm{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ *de codim* $\leq r-1$. *et* $\varphi : \mathrm{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_{n,n-r}(\mathbb{K})$ *lin.*
On supp. $\forall M \in W_1,\ \operatorname{rg}\begin{bmatrix} N & \varphi(N) \end{bmatrix} \leq r$.
Alors $\forall N \in V,\ \operatorname{Im}\varphi(N) \subset \operatorname{Im}(N)$ *(sauf si* $r=2$ *et* $\operatorname{card}(\mathbb{K})=2$*).*

Lemme 11. *Avec les m̂ hypothèses,*
$\exists C \in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$ *t.q.* $\forall N \in W_1,\ \varphi(N) = NC$.

Preuve du lemme 10 :

pour $N \in W_1$, on écrit $\varphi(N) = \begin{bmatrix} ? \\ \alpha(M) \end{bmatrix}$, avec $\alpha \in \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. On introduit G sev des $P \in \mathrm{M}_r(\mathbb{K})$ t.q. V contienne $\begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors $\operatorname{codim} G \leq r-1$.
Pour tout $P \in G$ inversible, $\alpha(P) = 0$.
Or $G \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ engendre G (thm de Dieudonné !).
Donc $\alpha = 0$.
$\to$ en généralisant, on conclut.

III. Espaces affines de matrices de rang $\geq r$

A. Énoncé du problème

Ici, $\mathcal{P}(M)$ est "$\operatorname{rg} M \geq r$".
<u>Motivation :</u> soit V sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Est-il engendré par ses matrices de rang $\leq s$? Il ne l'est pas ssi V admet un *hyperplan affine* de matrices de rg $> s$.

On se contentera ici de décrire le cas $n = r$ (espaces affines de matrices inversibles).

<u>Lien avec le thm de Gerstenhaber :</u>
Soit $\mathcal{V}$ espace affine de direction V. OS $I_n \in \mathcal{V}$.
Conditions équivalentes :

(i) $\mathcal{V} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;

(ii) $\forall M \in V,\ I_n + M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;

(iii) $\forall M \in V,\ \forall t \in \mathbb{K},\ I_n + tM \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;

(iv) $\forall M \in V,\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M) \subset \{0\}$.

Si $\mathbb{K}$ alg. clos, ces conditions sont équivalentes à V nilpotent ! !

Définition 1. V est dit **à spectre trivial** lorsque $\forall M \in V,\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M) \subset \{0\}$.

B. Majoration de la dimension

Théorème 12 (de Seguins Pazzis, 2007)**.** *Si* V *sev de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *est à spectre trivial,* $\dim V \leq \binom{n}{2}\cdot$

Corollaire 13. *Si* $\mathcal{V}$ *sea de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *inclus dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*, alors* $\dim \mathcal{V} \leq \binom{n}{2}\cdot$

C. de Seguins Pazzis, On the matrices of given rank in a large subspace, *Linear Algebra Appl.*, **435** (2011) 147-151.

C. Sous-espaces de dimension maximale

A priori, structure bien plus compliquée, pour les sev à spectre trivial de dim maximale, que ds le cas nilpotent.
Exemple : $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$, espace des matrices antisymétriques réelles, non conjugué à $T_n^{++}(\mathbb{R})$ si $n > 2$.

Principe de réduction : Soit V sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ à spectre trivial de dimension $\binom{n}{2}$.
Si V *réductible*, OPS $\exists r \in [\![1, n-1]\!]$ t.q. tt élt de V est de la forme

$$M = \begin{bmatrix} A(M) & ? \\ 0 & B(M) \end{bmatrix}$$

où $A(M) \in \mathrm{M}_r(\mathbb{K})$ et $B(M) \in \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. $A(V)$ et $B(V)$ à spectre trivial !
Majoration de la dim. + théorème du rang donnent :

$$\dim A(V) = \binom{r}{2} \text{ et } \dim B(V) = \binom{n-r}{2}.$$

Avec le thm du rang, on obtient que V est l'ensemble $A(V) \vee B(V)$ des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$$

où $A_1 \in A(V)$, $B_1 \in B(V)$, C_1 quelconque.
Bilan : il suffit de classifier les sev *irréductibles* à spectre trivial de dim max.

$\boxed{\text{On suppose maintenant } \mathrm{card}(\mathbb{K}) > 2.}$

Théorème 14 (de Seguins Pazzis, 2011)**.** *Les sev irréductibles à spectre trivial de dim max de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *sont les* $PA_n(\mathbb{K})$*, où* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est* anisotrope*.*

Théorème 15 (de Seguins Pazzis, 2011)**.** *Soit* V *sev à spectre trivial de dim max de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors* $\exists P_1, \dots, P_r$ *anisotropes t.q.*

$$V \simeq P_1 A_{q_1}(\mathbb{K}) \vee \cdots \vee P_r A_{q_r}(\mathbb{K}).$$

Chacun des P_i *est déterminé par* V *à* simili-congruence *près (i.e.* $P \sim Q \Leftrightarrow \exists R$ *inversible et* $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ *t.q.* $P = \lambda\, RQ\, {}^t R$*).*

Théorème 16 (de Seguins Pazzis, 2011)**.** *Soit* $\mathcal{V}$ *sea de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et de dim max. Alors* $\exists P_1, \dots, P_r$ *anisotropes t.q.*

$$\mathcal{V} \sim I_n + \Big[P_1 A_{q_1}(\mathbb{K}) \vee \cdots \vee P_r A_{q_r}(\mathbb{K})\Big].$$

Chacune des FQ anisotropes $X \mapsto {}^t X P_i X$ *est déterminé par* V *à* similitude *près.*

Interprétation : la classification des formes quadratiques anisotropes sur $\mathbb{K}$ à similitude près est lisible dans la géométrie affine des groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$! !

C. de Seguins Pazzis, Large affine spaces of non-singular matrices, prépublication arXiv,
http ://arxiv.org/abs/1102.2493

Extension aux sous-espaces affines de rang $\geq r$:

C. de Seguins Pazzis, Large affine spaces of matrices with rank bounded below, prépublication arXiv,
http ://arxiv.org/abs/1102.4027