Workshop « Clifford algebras, K-theory and Index theory »

8 mars 2014

Algèbres à division à gauche bilinéarisable

Clément de Seguins Pazzis

Lycée Sainte-Geneviève, Versailles

Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines

dsp.prof@gmail.com

http://dsp.prod.free.fr/recherche.html

I. Définition, propriétés élémentaires, exemples

II. Lien avec la réflexivité algébrique

III. Classification

Références :

C. de Seguins Pazzis, Local linear dependence seen through duality I, preprint, 2013, arXiv : http://arxiv.org/abs/1306.1845

C. de Seguins Pazzis, LDB division algebras, preprint, 2013, arXiv : http://arxiv.org/abs/1312.7800

I. Définition, propriétés élémentaires, exemples

$\mathbb{K}$ corps commutatif arbitraire.

Définition 1. $(A, \star)$ est une **algèbre à division** (sur $\mathbb{K}$) quand A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et

$$\star : \begin{cases} A \times A & \to A \\ (x, y) & \mapsto x \star y \end{cases}$$

bilinéaire t.q.

$$\forall (x, y) \in (A \setminus \{0\})^2,\ x \star y \neq 0.$$

Remarques :

- Ni associativité ni neutre exigés !
- $x \star -$ bijective pour tout $x \in A \setminus \{0\}$. Pour $x \in A \setminus \{0\}$ et $y \in A$, l'unique z tel que $x \star z = y$ est « y divisé à gauche par x ».

Définition 2. Une **algèbre à division à gauche bilinéarisable** (algèbre à division **LDB**) est un triplet $(A, \star, \bullet)$ dans lequel $(A, \star)$ et $(A, \bullet)$ sont deux algèbres à division t.q.

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \star (x \bullet y) \in \mathbb{K} y.$$

D'où une forme quadratique *anisotrope* q sur A t.q.

$$\boxed{\forall (x, y) \in A^2,\ x \star (x \bullet y) = q(x)\, y,}$$

i.e.

$$\forall x \in A,\ (x \star -) \circ (x \bullet -) = q(x)\ \mathrm{id}_A\ .$$

Remarques :

- La loi $\bullet$ et q déterminés par $\star$ de manière unique à multiplication par un scalaire près.
- Règle inverse vérifiée :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ x \bullet (x \star y) = q(x)\, y.$$

- Si $\mathbb{K}$ fini alors $\dim A \leq 2$.
- La dimension n de A vérifie $n = 1$ ou n pair car

$$\forall x \in A,\ \det(x \star -) \det(x \bullet -) = q(x)^n.$$

Exemples classiques.

- Dimension 1 : $A = \mathbb{K}$, $\star$ et $\bullet$ la multiplication ($q : x \mapsto x^2$)
- Dimension 2 : $A = \mathbb{L}$ extension quadratique de $\mathbb{K}$,
  $\star$ la multiplication, $x \bullet y := \overline{x}y, \;\; q = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$.
- Dimension 4 : $A = \mathcal{Q}$ algèbre de quaternions sur $\mathbb{K}$ et corps gauche, $\star$ sa multiplication, $x \bullet y := \overline{x}y$, q la norme $N_{\mathcal{Q}}$.
- Dimension 8 : $A = \mathbb{O}$ algèbre d'octonions associée à $\mathcal{Q}$ et à un scalaire $\varepsilon \in \mathbb{K} \setminus N_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q})$.
  Rappel : $\mathbb{O} = \mathcal{Q}^2$ comme $\mathbb{K}$-ev,

$$(a, b) \star (c, d) := (ac - d\overline{b}, \overline{a}d - \varepsilon cb).$$

$$(a, b) \bullet (c, d) := (\overline{a}, -b) \star (c, d),$$

  q équivalente à $N_{\mathcal{Q}} \perp (-\varepsilon N_{\mathcal{Q}}) \simeq N_{\mathcal{Q}} \otimes \langle 1, -\varepsilon \rangle$.

Exemple dégénéré en caractéristique 2.

On suppose $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2$. On suppose trouvée une extension finie $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ t.q.

$$\forall x \in \mathbb{L},\ x^2 \in \mathbb{K}$$

(extension *hyper-radicielle*).
Exemple : $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2(X_1^2, \ldots, X_n^2)$, $\mathbb{L} = \mathbb{F}_2(X_1, \ldots, X_n)$.

Alors $(\mathbb{L}, \times, \times)$ algèbre à division LDB, $q : x \in \mathbb{L} \mapsto x^2$.
q totalement dégénérée !

Remarque : dans ce cas $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2^p$.

II. Lien avec la réflexivité algébrique

Soit U, V espaces vectoriels, $\mathcal{S}$ sev de $\mathcal{L}(U, V)$.

Définition 3 (Clotûre réflexive de $\mathcal{S}$)**.**

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) := \big\{g \in \mathcal{L}(U,V) :\ \forall x \in U,\ g(x) \in \mathcal{S}x\big\}.$$

où

$$\mathcal{S}x := \{f(x) \mid f \in \mathcal{S}\}.$$

Remarques :

- $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ sev de $\mathcal{L}(U, V)$;
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}(\mathcal{S})$;
- $\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{S})) = \mathcal{R}(\mathcal{S})$.

Définition 4. $\mathcal{S}$ **algébriquement réflexif** ssi $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Exemple : $(A, \star)$ alg. à division.

$$\mathcal{S} := \{x \star - \mid x \in A\}.$$

Alors $\forall y \in A \setminus \{0\},\ \mathcal{S}y = A$ donc

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(A).$$

Théorème 1 (Meshulam, Šemrl (2004))**.**
Si $\dim \mathcal{S} = n < \operatorname{card} \mathbb{K}$ *et* $\mathcal{S}$ *non réflexif, alors*

$$\exists f \in \mathcal{S} : \quad 0 < \operatorname{rg} f \leq 2n - 2.$$

R. Meshulam, P. Šemrl, Locally linearly dependent operators and reflexivity of operator spaces, *Linear Algebra Appl.* **383** (2004) 143-150.

Remarques :

- Si $\mathbb{K}$ algébriquement clos, on peut remplacer $2n - 2$ par n.
  Voir R. Meshulam, P. Šemrl, Minimal rank and reflexivity of operator spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007) 1839-1842.
- Le résultat reste vrai si $\operatorname{card} \mathbb{K} \leq n$ (en cours de rédaction).

$\boxed{\text{Problème : la borne } 2n - 2 \text{ est-elle optimale ?}}$

Définition 5. Soit $(A, \star, \bullet)$ algèbre à division LDB. Pour $(x, \lambda, \mu) \in A \times \mathbb{K}^2$,

$$\Gamma_{x,\lambda,\mu} : \begin{cases} A^2 & \longrightarrow A^2 \\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} & \longmapsto \begin{bmatrix} x \star z + \lambda y \\ x \bullet y + \mu z \end{bmatrix} \end{cases}.$$

$$\mathcal{T}_A := \left\{ \Gamma_{x,\lambda,\mu} \mid (x, \lambda, \mu) \in A \times \mathbb{K}^2 \right\} \subset \mathcal{L}(A^2),$$

espace d'opérateurs tordu associé à A.

Proposition 2. *Pour* $(x, \lambda, \mu) \in A \times \mathbb{K}^2$,

$$\Gamma_{x,\lambda,\mu} \in \mathrm{GL}(A^2) \Leftrightarrow q(x) \neq \lambda\mu.$$

Démonstration. Si $x \neq 0$,

$$(y, z) \in \operatorname{Ker} \Gamma_{x,\lambda,\mu} \Leftrightarrow \begin{cases} x \star z + \lambda\, y & = 0 \\ \mu\, x \star z + q(x)\, y & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \mu & q(x) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \star z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

Remarque : $\widetilde{q}(\Gamma_{x,\lambda,\mu}) := q(x) - \lambda\mu$ forme quadratique sur $\mathcal{T}_A$.

Proposition 3. *Soit $\mathcal{H}$ hyperplan anisotrope de $\mathcal{T}_A$. Alors $\mathcal{H}$ non réflexif, et même $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{T}_A \setminus \mathcal{H}$, $(y,z) \in A^2 \setminus \{0\}$. Si on trouve $f \in \mathcal{T}_A \setminus \{0\}$ tel que $f(y,z) = 0$, alors $f \notin \mathcal{H}$ donc

$$f = h + \lambda g, \quad \text{où } h \in \mathcal{H} \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}^*$$

d'où

$$g(y,z) = (-\lambda^{-1}h)(y,z) \in \mathcal{H}(y,z).$$

- Si $y = 0$ alors $f := \Gamma_{0,1,0}$;
- Si $z = 0$ alors $f := \Gamma_{0,0,1}$;
- Si $z \neq 0$ et $y \neq 0$ alors x_0 défini par $x_0 \star z = y$ et alors $f := \Gamma_{x_0,-1,-q(x_0)}$ convient.

$\square$

Bilan : si $n = \dim A$, alors $\dim \mathcal{H} = n+1$ et

$$\forall f \in \mathcal{H} \setminus \{0\},\ \operatorname{rg}(f) = 2n = 2(n+1) - 2,$$

donc $\mathcal{H}$ cas limite dans le théorème de Meshulam-Šemrl.

Théorème 4 (de Seguins Pazzis (2013)). *Soit $\mathcal{S}$ sev de $\mathcal{L}(U,V)$ non réflexif, de dimension n t.q. $3 \leq n < \operatorname{card} \mathbb{K}$, avec $\mathcal{S}$* réduit*. On suppose que*

$$\forall f \in \mathcal{S} \setminus \{0\},\ \operatorname{rg}(f) \geq 2n-2.$$

Alors il existe A algèbre à division LDB et $\mathcal{H}$ hyperplan anisotrope de $\mathcal{T}_A$ tel que

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{H}.$$

Note : $\mathcal{S}$ réduit signifie

$$\sum_{f \in \mathcal{S}} \operatorname{Im} f = V \quad \text{et} \quad \bigcap_{f \in \mathcal{S}} \operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

Questions en suspens :

- dimensions possibles des algèbres à division LDB sur $\mathbb{K}$?
- classification des algèbres à division LDB ?
- cas des petits corps finis ? (question ouverte)

III. Classification

III.1 Notions d'équivalence entre algèbres à division LDB

Définition 6. Soit $(A, \star)$ et $(B, \star')$ algèbres à division sur $\mathbb{K}$. Elles sont **isotypiques** ssi il existe f, g, h isomorphismes de A vers B t.q.

$$\forall (x, y) \in A^2,\ x \star y = h^{-1}(f(x) \star' g(y)).$$

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[r, "f \times g", "\simeq"'] \arrow[d, "\star"] & B \times B \arrow[d, "\star'"] \\
A \arrow[r, "\simeq", "h"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Définition 7. Soit $(A, \star, \bullet)$ et $(B, \star', \bullet')$ algèbres à division LDB.

On les dit :

- **faiblement équivalentes** ssi $(A, \star)$ et $(B, \star')$ isotypiques ;
- **équivalentes** ssi $\exists\ f, g, h$ isomorphismes de A vers B t.q.

$$\forall (x, y) \in A^2,\ \begin{cases} x \star y = h^{-1}(f(x) \star' g(y)) \\ x \bullet y = g^{-1}(f(x) \bullet' h(y)). \end{cases}$$

Remarques :

- Si $(A, \star, \bullet)$ faiblement équiv. à $(B, \star', \bullet')$, alors $(A, \star, \bullet)$ équivalente à $(B, \star', \lambda\bullet')$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- La forme quadratique associée est déterminée à équivalence (resp. similitude) près par le type d'équivalence (resp. d'équivalence faible) de A.

Motivation :

Théorème 5. *Soit A et B deux algèbres à division LDB. Alors :*

(a) A faiblement équivalente à B ssi $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ équivalents ;

(b) A équivalente à B ssi $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ semblables.

III.2 Théorèmes de classification

Théorème 6 (Classification, cas non dégénéré)**.** *Soit A algèbre à division LDB de FQ q* non-dégénérée.

Alors :

(a) $\dim A \in \{1, 2, 4, 8\}$.

(b)

$\dim A = \dots$	A *faiblt équiv. à une alg. de type*
2	*quadratique*
4	*quaternionique*
8	*octonionique*

(c) Si $1 \in q(A)$, le point (b) est valable en remplaçant « faiblement équivalente »par « équivalente ».

Théorème 7 (Classification, cas dégénéré)**.** *Soit A algèbre à division LDB de FQ q dégénérée (et donc $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2$). Alors A faiblement équivalente à une algèbre à division LDB de type hyper-radiciel.*

Si de plus $1 \in q(A)$ alors A équivalente à une algèbre à division LDB de type hyper-radiciel.

Théorème 8 (Classification, cas général)**.** *Une alg. à division LDB est déterminée, à équivalence près (resp. à équivalence faible près) par le type d'équivalence (resp. de similitude) de sa FQ.*

Bilan : la classification se réduit, si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, à celle des *formes de Pfister* anisotropes de dimension $2, 4, 8$ (i.e. les formes anisotropes du type $\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$ avec $n \in \{1, 2, 3\}$).

III.3 Stratégie de démonstration

Données : $(A, \star, \bullet)$ algèbre à division LDB, q sa FQ. On se limite au cas où

$$\exists e \in A : \ q(e) = 1$$

(réduction facile).

Définition 8. A est e**-standard** lorsque, pour s réflexion de (A, q) de droite $\mathbb{K}e$, et $\overline{x} := -s(x)$:

(a) $\forall (x, y) \in A^2, \ x \bullet y = \overline{x} \star y$;

(b) $e \star - = \mathrm{id}_A$ i.e. e neutre à gauche pour $\star$.

La preuve se fait en 2 étapes :

1. Réduction au cas e-standard : on démontre que $(A, \star, \bullet)$ est équivalente à $(A, \star', \bullet')$ de FQ q, et e-standard ;
2. On classifie les algèbres e-standards grâce aux algèbres de Clifford !

III.3.a Utilisation des algèbres de Clifford

Supposons que $(A, \star, \bullet)$ est e-standard, de dimension n.

$$\forall x \in A,\ (x \star -) \circ (\overline{x} \star -) = q(x)\ \mathrm{id}_A\,.$$

En particulier,

$$x \perp e \Rightarrow (x \star -)^2 = -q(x)\ \mathrm{id}_A\,.$$

Application au problème de la dimension :

On a déjà $n = 1$ ou n pair. On suppose $n \geq 6$ et q non-dégénérée. On trouve $V \perp \{e\}$ t.q. q_V non-dégénérée et $\dim V = n - 2$.

L'application $x \in V \mapsto (x \star -) \in \mathcal{L}(A)$ induit un morphisme d'algèbres

$$\Phi : C(-q_V) \to \mathcal{L}(A).$$

Or $C(-q_V)$ simple car $\dim V$ paire ! ! Donc

$$2^{n-2} \leq n^2$$

et ainsi

$$n \leq 8.$$

Cas $n = 6$: alors A est un $C(-q_V)$-module, et

$$C(-q_V) \simeq \mathrm{M}_d(\mathbb{L})$$

avec $\mathbb{L}$ extension gauche de $\mathbb{K}$, $p := [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ vérifie

$$pd^2 = 2^4.$$

Les $C(-q_V)$-modules minimaux sont de dimension dp.

Donc,

$$dp \mid 6$$

puis $(dp) \mid 2$ et on contredit $pd^2 = 2^4$ ...