ÉNONCÉ

Polytechnique, épreuve B

Attention, l'énoncé suivant est une profonde réécriture du sujet d'origine. Les retouches sont l'œuvre de Clément de Seguins Pazzis. L'auteur de l'original préfère probablement rester anonyme.

Préambule

Toutes les variables aléatoires (discrètes) envisagées ici sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ fixé une bonne fois pour toutes. On considère une telle variable X dont la loi est donnée par

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = x_i) = p_i \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1,$$

et où $(x_i)_{i\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs deux à deux distincts. On suppose que X admet une espérance finie notée $m := \mathbf{E}(X) > 0$.

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et de même loi que X. On supposera plus précisément que X et toutes les variables X_k prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. On note $(S_k)_{k\geqslant 0}$ les sommes partielles définies par

$$S_0 := 0, \quad \text{et pour } n \geqslant 1, \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$N(a,b)(\omega) := \mathrm{Card}\big\{k \in \mathbb{N} : S_k(\omega) \in [a,b]\big\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{(S_k\in[a,b])}(\omega),$$

qui est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Nous avons ainsi défini une fonction $N(a,b) : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et nous admettons qu'il s'agit d'une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$.

Étant donné une variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on dit que Y est d'espérance finie lorsque $\mathbf{P}(Y = +\infty) = 0$ et la série $\displaystyle\sum_k k\,\mathbf{P}(Y = k)$ converge. Dans ce cas le réel positif

$$\mathbf{E}(Y) := \sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\mathbf{P}(Y = k)$$

est appelé **espérance** de Y. Lorsque Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ on retrouve la notion déjà connue du lecteur.

L'objet de ce problème est l'étude du comportement de $N(a,b)$ quand a et b tendent vers l'infini.

Première partie

1.a. Justifier que pour tous $\ell \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\big(N(0,\ell) = n+1\big) = \big(S_n \leqslant \ell < S_{n+1}\big),$$

$$\big(S_n \leqslant \ell\big) = \big(N(0,\ell) \geqslant n+1\big) \quad \text{et} \quad (S_n \geqslant \ell) \subset \big(N(0,\ell) \leqslant n+1\big).$$

1.b. On suppose dans cette question que X admet de plus une variance finie V. Montrer alors que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}\big(S_n \leqslant n(m-\varepsilon)\big) \leqslant \frac{V}{\varepsilon^2 n}\cdot$$

2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geqslant k).$$

3.a. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant e^{\ell} \Big(\mathbf{E}\big(\exp(-X)\big)\Big)^n.$$

3.b. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \leqslant \ell)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, que $N(0,\ell)$ est d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}\big(N(0,\ell)\big) \leqslant \frac{e^{\ell}}{1 - \mathbf{E}\big(\exp(-X)\big)}\cdot$$

3.c. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $\ell \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}\big(S_{n-1} < x \leqslant S_n,\ N(x,x+\ell) \geqslant k\big) \leqslant \mathbf{P}\big(S_{n-1} < x \leqslant S_n\big)\,\mathbf{P}\big(N(0,\ell) \geqslant k\big),$$

puis que $N(x,x+\ell)$ est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}\big(N(x,x+\ell)\big) \leqslant \frac{e^{\ell}}{1 - \mathbf{E}\big(\exp(-X)\big)}\cdot$$

Deuxième partie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est bornée, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

sa norme uniforme. L'adhérence de $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ est appelée support de f. En particulier, si x n'appartient pas au support de f, alors $f(x) = 0$.

Soit $K > 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée à support inclus dans $[0,K]$. On va étudier la suite des fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $n \geqslant 0$ par

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}\big(g(x - S_k)\big).$$

Sous réserve de convergence, la limite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $f(x)$.

4.a. Montrer que si $g = \mathbf{1}_{[0,K]}$, alors, pour tout réel x, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$f(x) = \mathbf{E}\big(N(x-K,x)\big).$$

4.b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|f_n(x)\big| \leqslant \|g\|_\infty \frac{e^K}{1 - \mathbf{E}\big(\exp(-X)\big)}.$$

4.c. Conclure que la suite des fonctions f_n converge simplement vers une fonction f bornée et dont le support est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

5. Soit Y une variable aléatoire discrète, indépendante de X, et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que

$$\mathbf{E}\big(\varphi(X,Y)\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, \mathbf{E}\big(\varphi(x_i,Y)\big).$$

6.a. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f_n(x - x_i).$$

6.b. Montrer que la fonction f vérifie l'égalité suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : \qquad f(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f(x - x_i).$$

7. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée qui vérifie $h(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, h(x - x_i)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7.a. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $h(x) = \mathbf{E}\big(h(x - S_n)\big)$.

7.b. En déduire que, si de plus le support de h est inclus dans $\mathbb{R}_+$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0$.

7.c. Conclure qu'il existe une unique fonction bornée à support dans $\mathbb{R}_+$ solution de (E).

8.a. Montrer que l'ensemble

$$\Lambda_X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{y \in \mathbb{R} :\ \mathbf{P}(S_n = y) > 0\big\}$$

est dénombrable et inclus dans $\mathbb{R}_+$.

On se donne une bijection $y : i \in \mathbb{N} \mapsto y_i \in \Lambda_X$.

8.b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = y_i)\, g(x - y_i).$$

8.c. En déduire qu'il existe une suite de réels positifs $(q_i)_{i\geqslant 0}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} q_i\, g(x - y_i) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \text{ tel que} \\ y_i\in[x-K,x]}} q_i = \mathbf{E}\big(N(x - K,x)\big).$$

9.a. Dans la formule précédente, montrer que la convergence de la série est normale sur tout segment de $\mathbb{R}$. *On pourra utiliser la question* **3.c**.

9.b. On suppose que g est continue. Montrer que f est uniformément continue.

9.c. On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que g' est bornée. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$, que f' est bornée et uniformément continue et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = g'(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f'(x - x_i).$$

Troisième partie

Soit Λ un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ tel que $\Lambda \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$ et

$$\forall (x,y) \in \Lambda^2, \quad x + y \in \Lambda.$$

On dit que Λ est *stable par addition.*

10.a. Montrer que si $(x,y) \in \Lambda^2$, $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ et $k \leqslant n$, alors

$$nx + k(y-x) \in \Lambda.$$

On définit

$$\Gamma := \left\{ z \in \mathbb{R}_+^* : \ \exists (x,y) \in \Lambda^2 : z = y - x \right\} \quad \text{et} \quad r(\Lambda) := \inf \Gamma.$$

10.b. Donner deux exemples de tels ensembles Λ, l'un pour lequel $r(\Lambda) > 0$, et l'autre pour lequel $r(\Lambda) = 0$.

11. Dans cette question, on suppose que $r(\Lambda) > 0$.

11.a. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \Lambda^2$ tel que $b - a \in [r(\Lambda), 2r(\Lambda)[$.

On note $d := b - a$.

11.b. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n - 1$. Montrer que

$$\Lambda \cap \left[na + kd, na + (k+1)d \right] = \left\{ na + kd, na + (k+1)d \right\}.$$

11.c. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\, a + n_0\, d > (n_0 + 1)\, a$ puis qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kd$.

11.d. En déduire que $\Lambda \subset d\mathbb{Z}$, où $d\mathbb{Z} = \{ kd \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

12. On suppose maintenant que $r(\Lambda) = 0$.

12.a. Soit $\eta > 0$. Montrer qu'il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$\Lambda \cap [x, x + \eta] \neq \emptyset.$$

12.b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans Λ telle que $x_n \to +\infty$, $f(x_n) \to 0$. Montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Quatrième partie

On suppose dans cette partie que pour tout réel $d \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}(X \in d\mathbb{Z}) < 1.$$

13. On considère une fonction h uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) \leqslant h(0) \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, h(x - x_i).$$

On rappelle que $h(x) = \mathbf{E}\big(h(x - S_n)\big)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ (voir la question **7.a**).

13.a. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$ tels que $\mathbf{P}(S_n = x) > 0$, on a $h(-x) = h(0)$.

13.b. Montrer que l'ensemble Λ_X défini à la question **8.a** est stable par addition et que $r(\Lambda_X) = 0$.

13.c. En déduire que $h(-x) \to h(0)$ quand $x \to +\infty$.

13.d. Conclure que h est une fonction constante.

On suppose dans toute la suite que g est de classe $\mathcal{C}^1$, à support dans $[0,K]$ avec $K > 0$. On rappelle que f est la limite simple des fonctions f_n et l'unique solution bornée de l'équation (E), qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée uniformément continue.

14.a. Prouver que la fonction $x \mapsto \sup\limits_{t \geqslant x} f'(t)$ admet une limite finie en $+\infty$.

On note

$$c := \lim_{x \to +\infty} \sup_{t \geqslant x} f'(t).$$

14.b. Montrer qu'il existe une suite $y_n \to +\infty$ telle que $f'(y_n) \to c$.

On admet qu'il existe une sous-suite $(t_k)_{k \geqslant 0}$ de $(y_n)_{n \geqslant 0}$ telle que la suite de fonctions $(\xi_k)_{k \geqslant 0}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \xi_k(t) = f'(t + t_k)$$

converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction notée ξ.

14.c. Montrer que ξ est constante, égale à c.

14.d. Conclure que $c = 0$.

On montrerait de même que $\lim\limits_{x \to +\infty} \inf\limits_{t \geqslant x} f'(t) = 0$, résultat que l'on admet dans toute la suite.

14.e. En déduire que $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

14.f. Montrer alors que pour tout $\ell \geqslant 0$, $f(t+\ell) - f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

On suppose, dans toute la suite de cette partie, la finitude de l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} : \ p_i > 0\}$. On pose

$$g_0(x) = \begin{cases} \mathbf{P}(X > x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On admet que g_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_0 = \mathbf{E}(X)$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux, bornées et à support dans un segment de $\mathbb{R}_+$. En utilisant la deuxième partie, pour tout $g \in \mathcal{F}$, on note Lg l'unique solution de (E) bornée à support dans $\mathbb{R}_+$.

Nous dirons que la suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$ satisfait la propriété $(\mathcal{P})$ si elle tend vers $+\infty$ et s'il existe une fonction continue $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $g \in \mathcal{F}$,

$$Lg(t_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} g(t)\mu(t)\,\mathrm{d}t.$$

On admet que toute suite tendant vers $+\infty$ admet une suite extraite qui satisfait la propriété $(\mathcal{P})$.

Dans la question suivante, on fixe une suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$ satisfaisant la propriété $(\mathcal{P})$ ainsi qu'une fonction associée μ.

15.a. Montrer, en utilisant la question **14.f**, que pour tous $g \in \mathcal{F}\cap\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ et $\ell \geqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} g(t)\big(\mu(t+\ell) - \mu(t)\big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

15.b. En déduire que μ est constante.

16.a. Montrer que $Lg_0(x) = 1$ pour tout $x \geqslant 0$.

16.b. En déduire que μ est constante de valeur $\dfrac{1}{\mathbf{E}(X)}\cdot$

17. Conclure que pour tout $g \in \mathcal{F}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}\big(g(x - S_k)\big) \to \frac{1}{\mathbf{E}(X)} \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{quand } x \to +\infty.$$

18. Soit $\ell > 0$ fixé. Déterminer le comportement de $\mathbf{E}\big(N(x,x+\ell)\big)$ quand $x \to +\infty$. Interpréter le résultat. Ce résultat est-il vrai s'il existe $d > 0$ tel que $\mathbf{P}(X \in d\mathbb{Z}) = 1$?