ÉNONCÉ

Polytechnique, épreuve A

Attention, l'énoncé suivant est une réécriture du sujet d'origine, nettoyé de ses erreurs et approximations.
Les retouches sont l'œuvre de Clément de Seguins Pazzis. L'auteur de l'original préfère probablement rester anonyme.

Notations

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On appelle **point entier** de $\mathbb{R}^n$ un point dont toutes les coordonnées sont entières, c'est-à-dire un point de $\mathbb{Z}^n$. Si $\mathcal{K}$ est une partie de $\mathbb{R}^n$, on note $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ son intérieur. On appelle points entiers de $\mathcal{K}$ (respectivement, points entiers intérieurs) les points de $\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^n$ (respectivement, les points de $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \cap \mathbb{Z}^n$). On note respectivement $\mathrm{Card}\big(\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^n\big)$ et $\mathrm{Card}\big(\overset{\circ}{\mathcal{K}} \cap \mathbb{Z}^n\big)$ le nombre (éventuellement infini) de points entiers de $\mathcal{K}$ et de son intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Soit h_β l'homothétie de rapport $\beta \in \mathbb{R}$ (centrée en 0) ; l'image de $\mathcal{K}$ par h_β est notée $\beta\mathcal{K} := h_\beta(\mathcal{K})$. Si τ_x est la translation de vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{K} - x := \tau_{-x}(\mathcal{K})$ l'image de $\mathcal{K}$ par τ_{-x}.

Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $m_{i,j}$ est le coefficient de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne.

On note $(x_1 \mid \cdots \mid x_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne qui vaut 1.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont entiers.

On note $\lfloor a \rfloor$ la partie entière d'un réel a : c'est le plus grand entier inférieur ou égal à a ; et $\{a\} := a - \lfloor a \rfloor \in [0,1[$ la partie fractionnaire de a. On note $\rfloor a \lfloor$ le plus grand entier strictement inférieur à a.

On rappelle que des entiers $a_1, \dots, a_k$ non tous nuls sont dits premiers entre eux dans leur ensemble si $\mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_k) = 1$.

Première partie

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et à coefficients entiers.

1.a. Montrer que M^{-1} est à coefficients rationnels.

1.b. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

i. la matrice M^{-1} est à coefficients entiers ;
ii. le réel $\det M$ vaut 1 ou -1.

Dans la suite, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients entiers et de déterminant ± 1. C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On remarque que pour $i \neq j$ et $c \in \mathbb{Z}$, la matrice $I_n + c\,E_{i,j}$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

2. Soit $M = (x_1 \mid \cdots \mid x_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2.a. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$.

2.b. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
i. la matrice M appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$;
ii. les points entiers du parallélépipède

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \right\}_{(t_1,\ldots,t_n)\in[0,1]^n}$$

sont exactement les 2^n points $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$ où $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$.

3. Pour tout α dans $\mathbb{R}$ et tous entiers i et j distincts compris entre 1 et n, décrire l'effet sur une matrice carrée M de taille n de la multiplication à gauche par $I_n + \alpha\,E_{i,j}$. Même question pour la multiplication à droite.

4. On suppose ici que $n \geqslant 2$. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des entiers non tous nuls. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est $(a_1, \ldots, a_n)$ et de déterminant $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)$. Pour cela on raisonne par récurrence sur n.

Soit $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ une matrice dont la première colonne est $(a_2, \ldots, a_n)$. Étant donné u,v dans $\mathbb{Q}$, on considère la matrice

$$M := \left(\begin{array}{ccccc|c} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & u \\ \hline & & & & & va_2 \\ & & N & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & va_n \end{array}\right).$$

4.a. Exprimer $\det M$ en fonction de $\det N$, u et v.

4.b. On suppose que les $a_2, \ldots, a_n$ ne sont pas tous nuls et que l'on a $\det N = \mathrm{pgcd}(a_2, \ldots, a_n)$. Montrer que l'on peut choisir u,v de sorte que M réponde à la question. Conclure.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, de déterminant non nul. On souhaite montrer qu'il existe une matrice A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que MA soit triangulaire supérieure et, en notant $MA := (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on ait $0 \leqslant c_{i,j} < c_{i,i}$ pour tous i,j dans $[\![1,n]\!]$ tels que $i < j$, et $c_{i,i} > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Jusqu'à la question **(c)** incluse, on suppose que $n \geqslant 2$.

5.a. On note $M = (x_1 \mid \cdots \mid x_n)$. Soit $x'_1, \ldots ,x'_n$ les éléments de $\mathbb{Z}^{n-1}$ obtenus en prenant les $n-1$ premières coordonnées de $x_1, \ldots ,x_n$.

Montrer qu'il existe $a_1, \ldots ,a_n$ dans $\mathbb{Q}$, non tous nuls, et vérifiant l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x'_i = 0$. Montrer que l'on peut choisir les a_i entiers et premiers entre eux dans leur ensemble.

5.b. Montrer qu'il existe une matrice A_1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que la première colonne de $\tilde{C} = MA_1$ ait tous ses coefficients $\tilde{c}_{i,1}$ nuls sauf le premier $\tilde{c}_{1,1}$ que l'on peut prendre strictement positif.

5.c. En considérant, pour tout entier $j \in [\![2,n]\!]$, la division euclidienne $\tilde{c}_{1,j} = q_j\, \tilde{c}_{1,1} + r_j$, où $0 \leqslant r_j < \tilde{c}_{1,1}$, montrer que l'on peut supposer $\tilde{c}_{1,1} > \tilde{c}_{1,j}$, quitte à changer A_1.

5.d. Conclure par récurrence.

6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, de déterminant non nul. Montrer qu'il existe une matrice A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que AM soit triangulaire inférieure et, en notant $AM = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on ait $0 \leqslant c_{i,j} < c_{j,j}$ pour tous i,j dans $[\![1,n]\!]$ tels que $i > j$, et $c_{j,j} > 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

Deuxième partie

Soit $s_0,s_1, \ldots ,s_n$ des points de $\mathbb{R}^n$. On suppose que les vecteurs $s_1 - s_0$, $s_2 - s_0$, …, $s_n - s_0$ sont linéairement indépendants. On appelle **simplexe de sommets** $s_0,s_1, \ldots ,s_n$ l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &:= \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i s_i \mid (t_0, \ldots ,t_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1} \text{ tel que } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}\\ &= \left\{ s_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (s_i - s_0) \mid (t_1, \ldots ,t_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1 \right\}.\end{aligned}$$

Si de plus les s_i sont tous des points entiers, on dit que $\mathcal{S}$ est un simplexe entier.

On définit le volume du simplexe $\mathcal{S}$ de sommets $s_0,s_1, \ldots ,s_n$ par

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) := \frac{1}{n!} \left| \det(s_1 - s_0, s_2 - s_0, \ldots , s_n - s_0) \right|.$$

On admet que la donnée du simplexe $\mathcal{S}$ détermine la liste $(s_0,\dots,s_n)$ à l'ordre près, c'est-à-dire que si une liste $(s'_0,\dots,s'_n)$ définit le même simplexe $\mathcal{S}$, alors il existe une permutation σ de $[\![0,n]\!]$ telle que $\forall i \in [\![0,n]\!],\ s'_i = s_{\sigma(i)}$.

7. Soit $\mathcal{S}$ le simplexe de sommets $s_0,s_1,\dots,s_n$.

7.a. Montrer que $\mathcal{S}$ est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$.

7.b. Montrer que

$$\overset{\circ}{\mathcal{S}} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i s_i \ \middle|\ (t_0,\dots,t_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1} \text{ tel que } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

En déduire que si $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$, alors $\lambda\mathcal{S} \subset \overset{\circ}{\mathcal{S}}$ pour tout $\lambda \in [0,1[$.

7.c. Pour i dans $[\![0,n]\!]$, on note $\hat{s}_i = (1,s_i)$ le point de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont les coordonnées sont 1 suivi des coordonnées de s_i. Exprimer $\left|\det(\hat{s}_0,\hat{s}_1,\dots,\hat{s}_n)\right|$ en fonction de $\mathrm{Vol}(\mathcal{S})$.

En déduire que le volume d'un simplexe ne dépend pas de l'ordre des sommets.

8. Soit $V \geqslant 0$ un réel.

8.a. Donner un exemple de simplexe entier de $\mathbb{R}^2$, de volume supérieur ou égal à V, et n'ayant aucun point intérieur entier.

8.b. Donner un exemple de simplexe entier de $\mathbb{R}^3$, de volume supérieur ou égal à V, et dont les seuls points entiers sont les sommets.

9. Soit $\mathcal{K}$ un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

9.a. Montrer que l'ensemble des $\lambda \geqslant 0$ tels que $-\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ est un intervalle.

On note

$$a(\mathcal{K}) = \sup\{\lambda \geqslant 0 :\ -\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\}.$$

9.b. Montrer que $a(\mathcal{K}) < +\infty$ et que $a(\mathcal{K}) = \max\{\lambda > 0 : -\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\}$.

9.c. Montrer que $0 < a(\mathcal{K}) \leqslant 1$.

En déduire que $a(\mathcal{K}) = 1$ si et seulement si $\mathcal{K}$ est symétrique par rapport à 0.

On **admet** le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans démonstration pour la suite du problème.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{S}$ un simplexe de $\mathbb{R}^n$ et k un entier. Si $\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \geqslant k$, il existe $k+1$ points distincts $v_0,\dots,v_k$ de $\mathcal{S}$ tels que $v_i - v_j \in \mathbb{Z}^n$ quels que soient i et j entre 0 et k.*

10. Dans toute cette question, $\mathcal{S}$ est un simplexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$. On veut montrer que

$$\mathrm{Card}\left(\overset{\circ}{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n\right) \geqslant 2 \left\rfloor \mathrm{Vol}(S)\left(\frac{a(\mathcal{S})}{a(\mathcal{S})+1}\right)^n \right\lfloor + 1.$$

On pose alors $a := a(\mathcal{S})$ et $k := \left\rfloor \mathrm{Vol}(S)\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n \right\lfloor$.

10.a. Exprimer, pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Vol}(\beta S)$ et $\mathrm{Vol}(\mathcal{S} - x)$.

Montrer que $\mathrm{Vol}\left(\dfrac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}\right) > k$ pour $\lambda \in \,]0,1[$ voisin de 1.

10.b. On dispose donc d'un $\lambda \in \,]0,1[$ tel que $\mathrm{Vol}\left(\dfrac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}\right) > k$. Le Théorème 1 fournit alors $k+1$ points distincts $v_0, \ldots, v_k$ dans $\dfrac{\lambda a}{a+1}\,\mathcal{S}$ vérifiant $v_i - v_j \in \mathbb{Z}^n$ pour tous i et j dans $[\![0,k]\!]$.

Montrer que les points $\dfrac{a(v_i - v_j)}{a+1}$ sont dans $\dfrac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}$.

En déduire que les $v_i - v_j$ sont dans $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$.

10.c. Montrer qu'il existe un indice $j \in [\![0,k]\!]$ tel que les $2k+1$ points $0, \pm\,(v_i - v_j)$, pour $i \in [\![0,k]\!] \setminus \{j\}$, soient distincts. En déduire l'énoncé de la question **10**, puis que

$$\mathrm{Card}\left(\overset{\circ}{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n\right) \geqslant \mathrm{Vol}(\mathcal{S})\left(\frac{a(S)}{2}\right)^n.$$

Troisième partie

Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux simplexes de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{S}$ est **équivalent** à $\mathcal{S}'$ lorsqu'il existe une liste $(s_0, \ldots, s_n)$ de sommets définissant $\mathcal{S}$, une liste $(s'_0, \ldots, s'_n)$ de sommets définissant $\mathcal{S}'$, et une matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $A(s_i - s_0) = s'_i - s'_0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

11. Montrer que la relation ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des simplexes de $\mathbb{R}^n$.

12. Montrer que deux simplexes entiers $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalents si et seulement s'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et un vecteur $b \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\mathcal{S}' = A(\mathcal{S}) - b$.

13. Montrer que le volume, le nombre de points entiers et le nombre de points intérieurs entiers sont les mêmes pour deux simplexes entiers équivalents.

14. Soit $\mathcal{S}$ un simplexe entier. Montrer que $\mathcal{S}$ est équivalent à un simplexe entier inclus dans le cube $\big[0,n!\,\mathrm{Vol}(\mathcal{S})\big]^n$.

On **admet** le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans démonstration.

Théorème 2. *Pour tout entier strictement positif* k*, il existe une constante strictement positive* $C(n,k)$ *telle que pour tout simplexe entier* $\mathcal{S}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *possédant exactement* k *points intérieurs entiers,* $\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \leqslant C(n,k)$*.*

15. Déduire du Théorème 2 que pour tout entier strictement positif k, il n'existe à équivalence près qu'un nombre fini de simplexes entiers de $\mathbb{R}^n$ ayant exactement k points intérieurs.