ÉNONCÉ

Mines, épreuve A

Attention, l'énoncé suivant est une réécriture du sujet d'origine, nettoyé de ses erreurs et approximations.
Les retouches sont l'œuvre de Clément de Seguins Pazzis.

Notations

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *extrémale dans* $\mathcal{A}$ si pour tous M,N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \Rightarrow A = M = N.$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

On note enfin $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de la forme

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i,j dans $[\![1,n]\!]$, où σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

La partie **A** *n'est pas indispensable à la résolution des parties suivantes.*

A. Un exemple

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n-1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer que J est une matrice de permutation. Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J, et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J.

Dans les trois questions suivantes n désigne un entier naturel *impair* $\geqslant 3$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n-1]\!]$ telle que :

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1 ;
- si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k-1$ modulo n, ou bien $X_{m+1} = k+1$ modulo n, ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer U_0 et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J.

4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.

5. En déduire la limite de U_m lorsque $m \to +\infty$.

B. Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact. Est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

7. Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?

8. Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice ***bistochastique*** $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *qui n'est* ***pas*** *une matrice de permutation.*

9. Montrer qu'il existe un entier $r > 1$ et deux familles $(i_1, \ldots, i_r)$ et $(j_1, \ldots, j_r)$ d'indices distincts dans $[\![1,n]\!]$ tels que pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $A_{i_k,j_k} \in \,]0,1[$ et $A_{i_k,j_{k+1}} \in \,]0,1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.

10. En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{cases} B_{i_k,j_k} = 1 & \text{pour } k \in [\![1,r]\!] \\ B_{i_k,j_{k+1}} = -1 & \text{pour } k \in [\![1,r]\!] \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

On dit qu'une matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$, à coefficients positifs ou nuls, admet un *chemin strictement positif* s'il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telle que $M_{\sigma(1),1}M_{\sigma(2),2}\cdots M_{\sigma(n),n} > 0$.

On démontre par récurrence sur n, et on *admet* le résultat suivant : si M est à coefficients positifs ou nuls et si toute matrice extraite de M ayant p lignes et q colonnes avec $p+q = n+1$ n'est pas la matrice nulle, alors M admet un chemin strictement positif.

11. Montrer que A admet un chemin strictement positif.

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $A_{\sigma(1),1}A_{\sigma(2),2}\cdots A_{\sigma(n),n} > 0$. On pose $\lambda_0 = \min\limits_j A_{\sigma(j),j}$ et $A_0 = \dfrac{1}{1-\lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

12. Montrer que A_0 est bien définie, et que c'est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A.

13. En raisonnant par récurrence, démontrer que A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, \dots,$ M_s :

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$$

où les coefficients λ_i sont strictement positifs et de somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$.

14. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\limits_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe. En déduire que $\inf\limits_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.

C. Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire défini par $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA\cdot B)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales.

15. Montrer que $\|PAQ\| = \|A\|$ pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P,Q dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux matrices ***symétriques réelles.***

16. Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A, D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que

$$\|A - B\|^2 = \|D_A P - P D_B\|^2.$$

17. Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i,j dans $[\![1,n]\!]$ est bistochastique et qu'il existe une énumération $\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)$ des valeurs propres de A et une énumération $\lambda_1(B),\ldots,\lambda_n(B)$ de celles de B telles que

$$\|A-B\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} R_{i,j}\,\big|\lambda_i(A)-\lambda_j(B)\big|^2.$$

18. En déduire que

$$\min_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sum_{j=1}^{n} \big|\lambda_{\sigma(j)}(A)-\lambda_j(B)\big|^2 \leqslant \|A-B\|^2.$$

Soit $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ un espace probabilisé et V l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $X\in V$, on note $X\sim P_X$ si X suit la loi P_X. Pour tout couple (P_1,P_2) de lois, on pose

$$d^2(P_1,P_2) = \inf\Big\{E\big(|X-Y|^2\big) \mid (X,Y)\in V^2 \text{ tel que } X\sim P_1 \text{ et } Y\sim P_2\Big\}.$$

Soit $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(b_1,\ldots,b_n)$ deux familles croissantes de réels. On suppose qu'il existe sur $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ une variable aléatoire $Z:\Omega\to[\![1,n]\!]$ suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On note respectivement P_1 et P_2 les lois des variables aléatoires a_Z et b_Z.

19. Montrer que

$$d^2(P_1,P_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i-b_i|^2.$$

En déduire, pour toutes matrices symétriques réelles A,B de valeurs propres respectives $a_1,\ldots,a_n$ et $b_1,\ldots,b_n$, l'inégalité :

$$n\,d^2(P_1,P_2) \leqslant \|A-B\|^2.$$